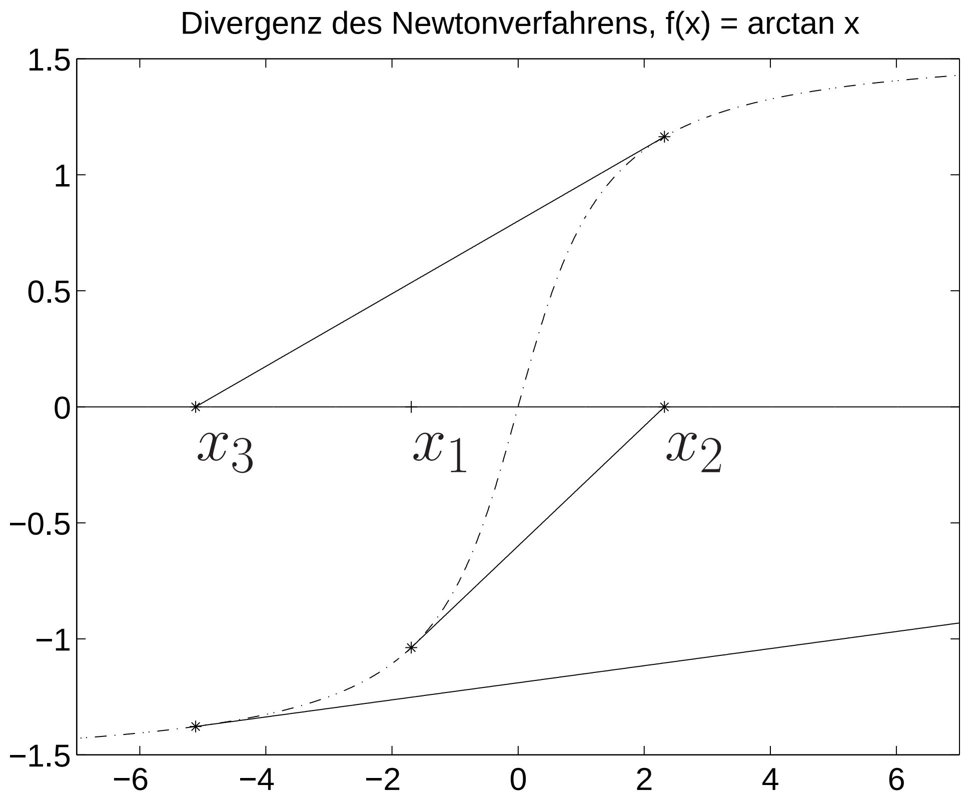
Aufgabe: Bestimmung der Nullstelle von $F(x) = \arctan x$

Newtonverfahren: $$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

n	x_n
0	1.5
1	-1.694
2	2.321
3	-5.114
4	32.296
5	$-1.575 \cdot 10^3$
6	$3.895 \cdot 10^6$
7	$-2.383 \cdot 10^{13}$



Problem: Die "Korrektur" $\frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$ "schießt" über die gesuchte Nullstelle $x^* = 0$ hinaus. Es gilt: $|x_{n+1}| > |x_n|$ für alle n.

Gedämpftes Newtonverfahren

Abhilfe:

gedämpftes Newtonverfahren: $$x_{n+1} = x_n - \lambda \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \qquad \lambda \in (0,1)$$

n	λ	x_n
0	0.9	1.5
5	0.9	-1.375
10	0.9	$2.769 \cdot 10^{-4}$
15	0.9	$2.769 \cdot 10^{-9}$
20	0.9	$3.0 \cdot 10^{-14}$

n	λ	x_n
0	0.1	10
100	0.1	-4.858
200	0.1	$-2.700 \cdot 10^{-5}$
300	0.1	$-7.173 \cdot 10^{-10}$
400	0.1	$-2.0 \cdot 10^{-14}$

Beobachtung: Bei geeigneter Wahl des Dämpfungsparameters λ konvergiert das Verfahren auch für x_0 weit von $x^* = 0$ entfernt. Allerdings ist die Konvergenz nur linear.

Gedämpftes Newtonverfahren mit Steuerung d. Dämpfungsparam.

input: Startwert x_0, Parameter μ, $q \in (0,1)$

$\lambda_0 := 1$, $\quad n := 0$

`while (Abbruchkriterium nicht erfüllt) {`

$\quad p := (F'(x_n))^{-1} F(x_n)$

$\quad$ `while` $\left(\|F(x_n)\|_2^2 - \|F(x_n - \lambda_n p)\|_2^2 < \mu \lambda_n \|F(x_n)\|_2^2 \right)$ `{`

$\quad\quad \lambda_n := q\lambda_n$

$\quad$ }

$\quad x_{n+1} := x_n - \lambda_n p$

$\quad \lambda_{n+1} := \min\{1, \lambda_n / q\}$

$\quad n := n + 1$

}

Beispiel: $F(x) = \arctan x, \quad x_0 = 1000, \quad q = \mu = 0.5$