Wärmeleitungsgleichung

- $u_t - u_{xx} = f \qquad$ auf $\Omega = (0,1), \qquad \mathrm{u}(0) = \mathrm{u}(1) = 0$
- Semidiskretisierung im Ort mit FEM $\longrightarrow$ ODE-System $\mathbf{M}\mathbf{u}' + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$
- Zeitdiskretisierung:

expliziter Euler	$\mathbf{M}\left(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\right) + k\mathbf{A}\mathbf{u}^n = k\mathbf{f}(t_n)$
impliziter Euler	$\mathbf{M}\left(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\right) + k\mathbf{A}\mathbf{u}^{n+1} = k\mathbf{f}(t_{n+1})$
Crank-Nicholson	$\mathbf{M}\left(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\right) + \frac{k}{2}\left(\mathbf{A}\mathbf{u}^n + \mathbf{A}\mathbf{u}^{n+1}\right) = k\mathbf{f}(t_{n+1/2})$

oder, in "expliziter" Form: $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{u}^n + \cdots$ wobei

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{expl} &= \mathbf{M}^{-1}\left(\mathrm{Id} - k\mathbf{A}\right) \\
\mathbf{P}_{impl} &= \left(\mathbf{M} + k\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{M} \\
\mathbf{P}_{CN} &= \left(\mathbf{M} + \frac{k}{2}\mathbf{A}\right)^{-1}\left(\mathbf{M} - \frac{k}{2}\mathbf{A}\right)
\end{aligned}$$

Analyse von $\mathbf{P}$ in $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{u}^n + \cdots$

stabil: $\|\mathbf{P}\| \leq 1$ in geeigneter Norm.
Idee: Für $\|\mathbf{P}\| \leq 1$ in irgendeiner Norm muß $\rho(\mathbf{P}) \leq 1$ sein.

Spektrum des verallg. EWP:

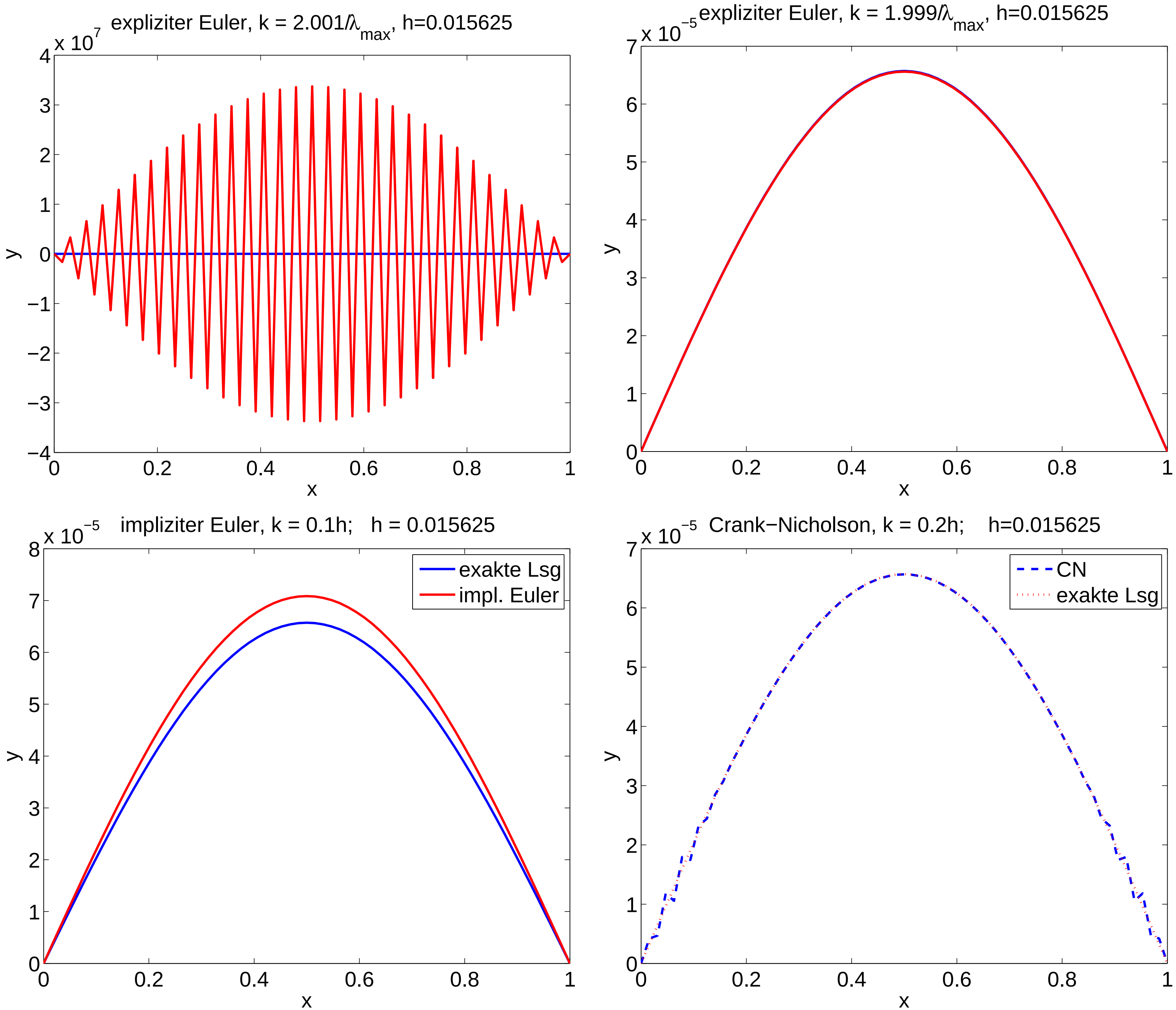
$$\sigma := \{\lambda \,|\, \exists \mathbf{x} \neq 0 : \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{M}\mathbf{x}\}$$

Name	$\mathbf{P}$	$\sigma(\mathbf{P})$	$\rho(\mathbf{P})$	stabil?
$\mathbf{P}_{exp}$	$\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{Id} - k\mathbf{A})$	$\{1 - k\lambda \,\|\, \lambda \in \sigma\}$	$\|1 - k\lambda_{max}\|$	falls $k \leq \frac{2}{\lambda_{max}}$
$\mathbf{P}_{impl}$	$(\mathbf{M} + k\mathbf{A})^{-1}\mathbf{M}$	$\{\frac{1}{1+k\lambda} \,\|\, \lambda \in \sigma\}$	$\frac{1}{\|1 + k\lambda_{min}\|} \leq 1$	für alle $k > 0$
$\mathbf{P}_{CN}$	$(\mathbf{M} + \frac{k}{2}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{M} - \frac{k}{2}\mathbf{A})$	$\{\frac{1-k/2\lambda}{1+k/2\lambda} \,\|\, \lambda \in \sigma\}$	$\frac{1 - k\lambda_{max}/2}{1 + k\lambda_{max}/2} \leq 1$	für alle $k > 0$

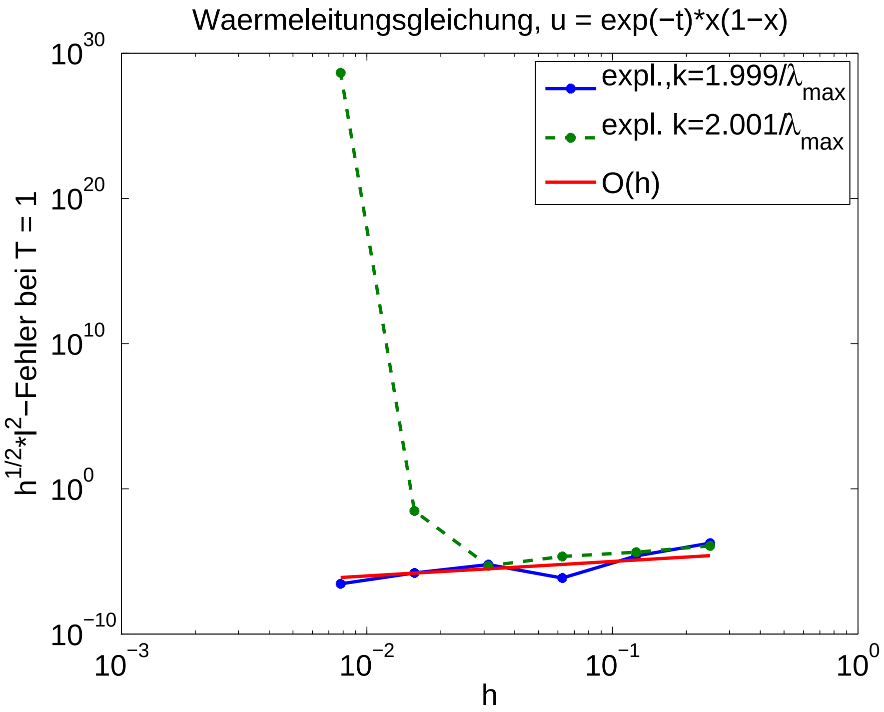
Zusammenfassung:

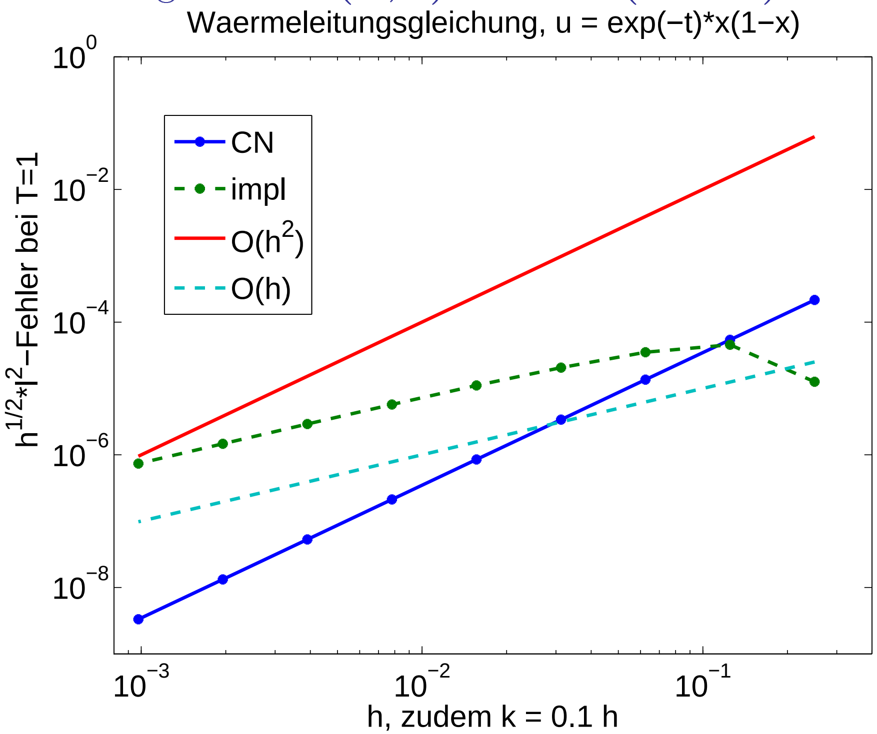
beim expliziten Eulerverfahren gibt es eine Schrittweitenbeschränkung für Stabilität, beim impliziten Eulerverfahren und beim Crank-Nicholson-Verfahren nicht.

1D Wärmeleitungsgleichung: $u_0 = 1,\ f \equiv 0$



1D Wärmeleitungsgleichung: Konvergenzbetrachtungen für $u(x,t) = e^{-t}x(1-x)$





Verfahren	stabil?	Fehler (falls alles gut geht)
impl. Euler	ja, für alle $k > 0$	$O(k + h^2)$
expl. Euler	falls $k \leq 2/\lambda_{max} \approx Ch^2$	$O(k + h^2)$
Crank-Nicholson	ja, für alle $k > 0$	$O(k^2 + h^2)$

- sehr restriktive Schrittweitenbeschränkung (bei expl. Verfahren)
- “hit or miss” bei expl. Verf.: λ_{max} ist in der Praxis nicht einfach bestimmbar