Adams-Verfahren: Grundideen

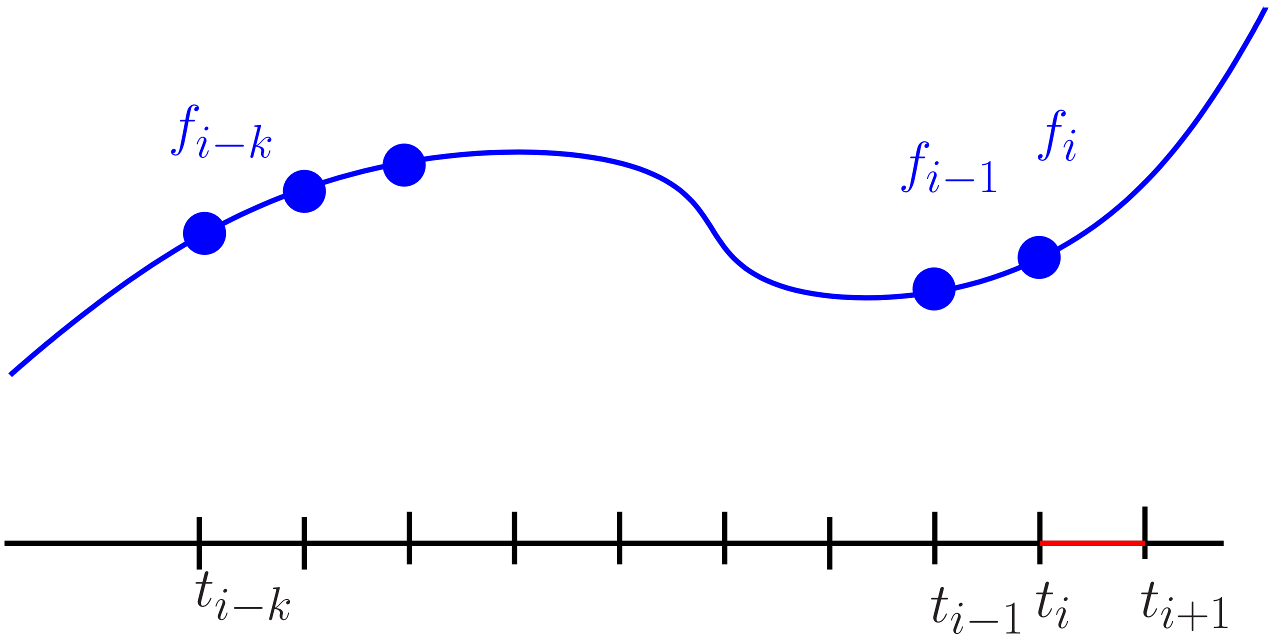
- Ausgangspunkt: $y(t_{i+1}) = y(t_{i-r}) + \int_{t_{i-r}}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\, dt$

- Idee: Interpoliere $t \mapsto f(t, y(t))$ in geeigneten Punkten und integriere das Interpolationspolynom

Adams-Bashforth-Verfahren

1. f wird in den Punkten $(t_{i-k}, f_{i-k}), \ldots, (t_i, f_i)$ interpoliert

2. $y_{i+1} = y_i + \displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} P_k(t)\, dt$

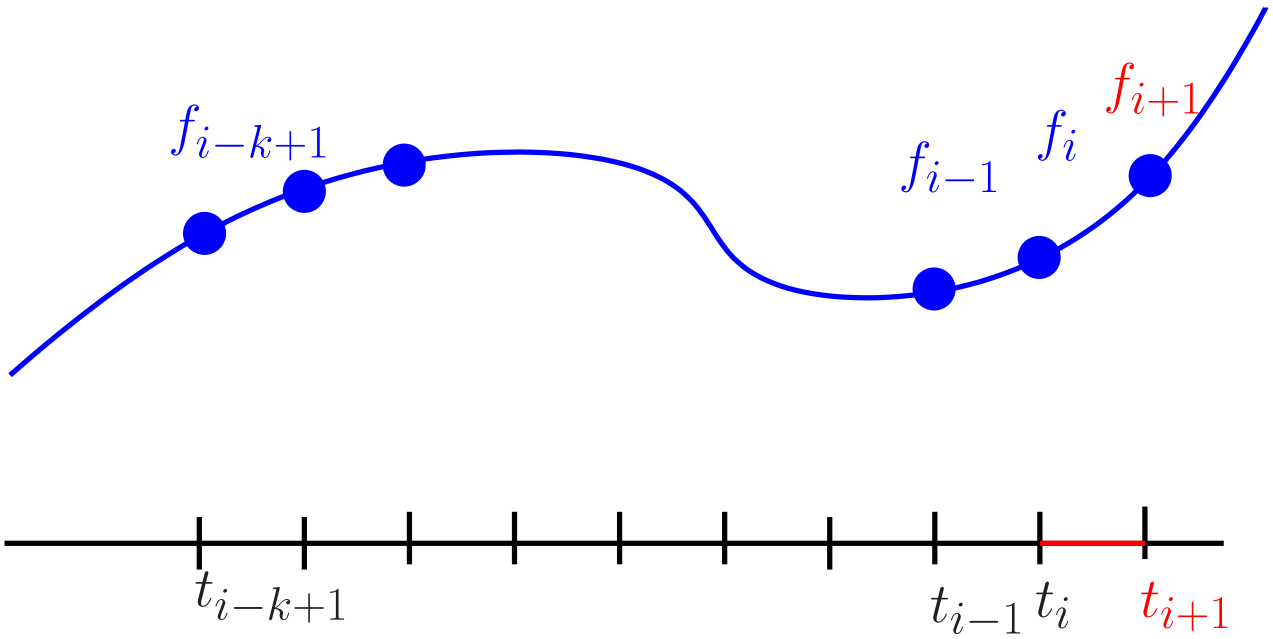


$\boxed{\text{Adams-Bashforth-Verfahren sind explizite Verfahren}}$

Adams-Moulton-Verfahren

1. f wird in den Punkten $(t_{i-k+1}, f_{i-k+1}), \ldots, (t_{i+1}, f_{i+1})$ interpoliert

2. $y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} P_k(t)\,dt$



Adams-Bashforth-Verfahren sind implizite Verfahren

Adams-Verfahren: das allgemeine Konstruktionsprinzip

$$y(t_{i+1}) = y(t_{i-r}) + \int_{t_{i-r}}^{t_{i+1}} f(t, y(t))\, dt$$

$$P_k(t) \;=\; \sum_{j=0}^{k} f_{i+1-s-j} L_j(t), \qquad L_j(t) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{k} \frac{t - t_{i+1-s-m}}{t_{i+1-s-j} - t_{i+1-s-m}}$$

$$\Longrightarrow y_{i+1} \;:=\; y_{i-r} + \int_{t_{i-r}}^{t_{i+1}} P_k(t)\, dt = y_{i-r} + \sum_{j=0}^{k} f_{i+1-s-j} \int_{t_{i-r}}^{t_{i+1}} L_j(t)\, dt,$$

$$\Longrightarrow y_{i+1} \;=\; y_{i-r} + h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{i+1-s-j},$$

$$\text{mit } \beta_j \;=\; \frac{1}{h} \int_{t_{i-r}}^{t_{i+1}} L_j(t)\, dt = \int_{-r}^{1} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{k} \frac{x - (1-s-m)}{(1-s-j) - (1-s-m)}\, dx.$$

Adams-Verfahren: Beispiele

1. **Adams-Bashforth-Verfahren** (explizit): Hier ist $s = 1$, $r = 0$. Es ergibt sich dann z.B.

$$
\begin{aligned}
k &= 0 \qquad & y_{i+1} &= y_i + h f_i \qquad \text{(explizites Eulerverfahren)} \\
k &= 1 \qquad & y_{i+1} &= y_i + h \frac{1}{2} \left(3 f_i - f_{i-1} \right) \\
k &= 2 \qquad & y_{i+1} &= y_i + h \frac{1}{12} \left(23 f_i - 16 f_{i-1} + 5 f_{i-2} \right) \\
k &= 3 \qquad & y_{i+1} &= y_i + h \frac{1}{24} \left(55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3} \right)
\end{aligned}
$$

2. **Adams-Moulton-Verfahren** (implizit): Hier ist $s = 0$, $r = 0$. Es ergibt sich dann z.B.

$$
\begin{aligned}
k &= 0 \qquad & y_{i+1} &= y_i + h f_{i+1} \qquad \text{(implizites Eulerverfahren)} \\
k &= 1 \qquad & y_{i+1} &= y_i + h \frac{1}{2} \left(f_{i+1} + f_i \right) \qquad \text{(Trapezregel)} \\
k &= 2 \qquad & y_{i+1} &= y_i + h \frac{1}{12} \left(5 f_{i+1} + 8 f_i - f_{i-1} \right) \\
k &= 3 \qquad & y_{i+1} &= y_i + h \frac{1}{24} \left(9 f_{i+1} + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2} \right)
\end{aligned}
$$

3. **Nyström-Verfahren** (explizit): Hier ist $s = 1$, $r = 1$. Es ergibt sich dann z.B.

$$k = 0 \qquad y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf_i \qquad \text{(Mittelpunktsregel)}$$

4. **Milne-Simpson-Regeln** (implizit): Hier ist $s = 0$, $r = 1$. Es ergibt sich dann z.B.

$$k = 2 \qquad y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{1}{3}h\left(f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}\right).$$

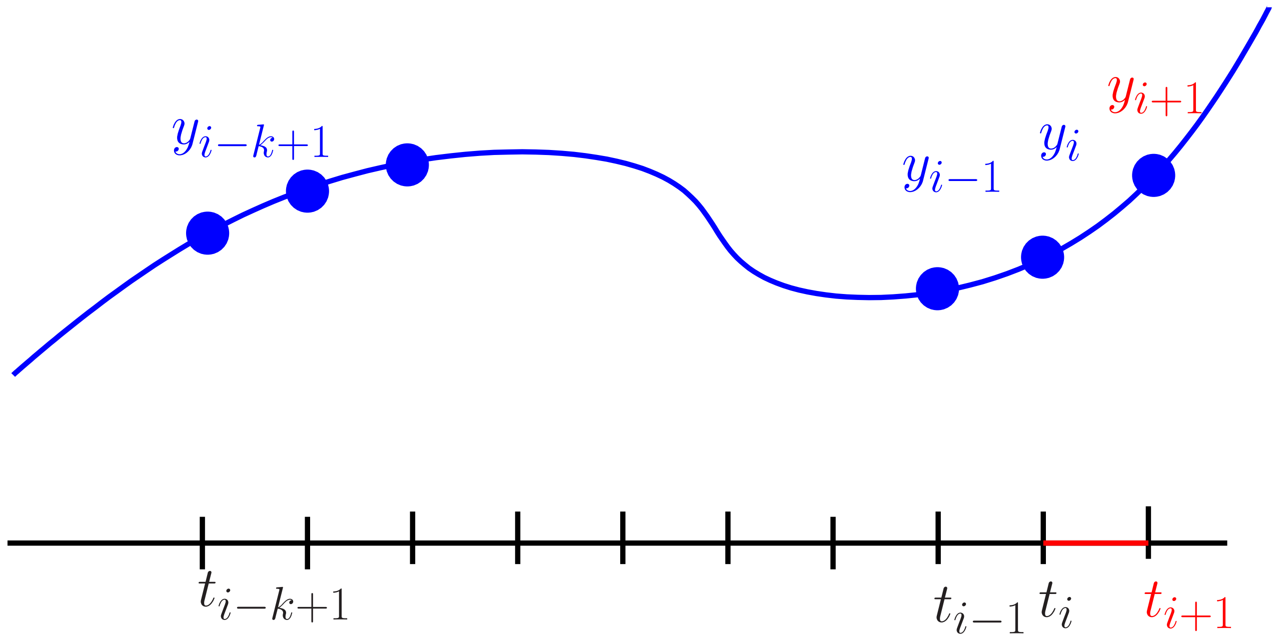
allgemeine Form

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k-j} y_{i+1-j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_{k-j} f_{i+1-j}}$$

BDF-Verfahren

1. y wird in den Punkten $(t_{i-k+1}, y_{i-k+1}), \ldots, (t_{i+1}, f_{i+1})$ interpoliert $\longrightarrow$ Interpolationspolynom P_k

2. Bestimmungsgleichung für y_{i+1}: $P_k'(t_{i+1}) \stackrel{!}{=} f(t_{i+1}, P_k(t_{i+1})) = f(t_{i+1}, y_{i+1})$



$\boxed{\text{BDF-Verfahren sind implizite Verfahren}}$

BDF-Verfahren (backward differentiation formulas) in Formeln

Interpolation in den Punkten (t_{i+1-j}, y_{i+1-j}), $j = 0, \ldots, k$:

$$P_k(t) = \sum_{j=0}^{k} y_{i+1-j} L_j(t), \qquad L_j(t) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{k} \frac{t - t_{i+1-m}}{t_{i+1-j} - t_{i+1-m}}$$

Forderung:

$$P_k'(t_{i+1}) = f(t_{i+1}, y_{i+1}).$$

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{i+1-j} = h f_{i+1}, \qquad \alpha_j = h L_j'(t_{i+1}),$$

wobei die Zahlen α_j unabhängig sind von i, denn (für $t_0 = 0$)

$$L_j(t) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{k} \frac{t - t_{i+1-m}}{t_{i+1-j} - t_{i+1-m}} = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{k} \frac{(t/h)h - (i+1-m)h}{(i+1-j)h - (i+1-m)h} = \widetilde{L}_j(t/h)$$

für ein Polynom $\widetilde{L}_j$, das unabhängig von von h ist.

Beispiele:

$$k=1 \qquad y_{i+1}-y_i = hf_{i+1} \qquad \text{(impliztes Eulerverfahren)}$$

$$k=2 \qquad y_{i+1}-\frac{4}{3}y_i+\frac{1}{3}y_{i-1} = h\frac{2}{3}f_{i+1}$$

$$k=3 \qquad y_{i+1}-\frac{18}{11}y_i+\frac{9}{11}y_{i-1}-\frac{2}{11}y_{i-2} = h\frac{6}{11}f_{i+1}.$$

allgemeine Form von Mehrschrittverfahren

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k-j}y_{i+1-j} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_{k-j}f_{i+1-j}}$$

- $\beta_k = 0$: explizit
- $\beta_k \neq 0$: implizit