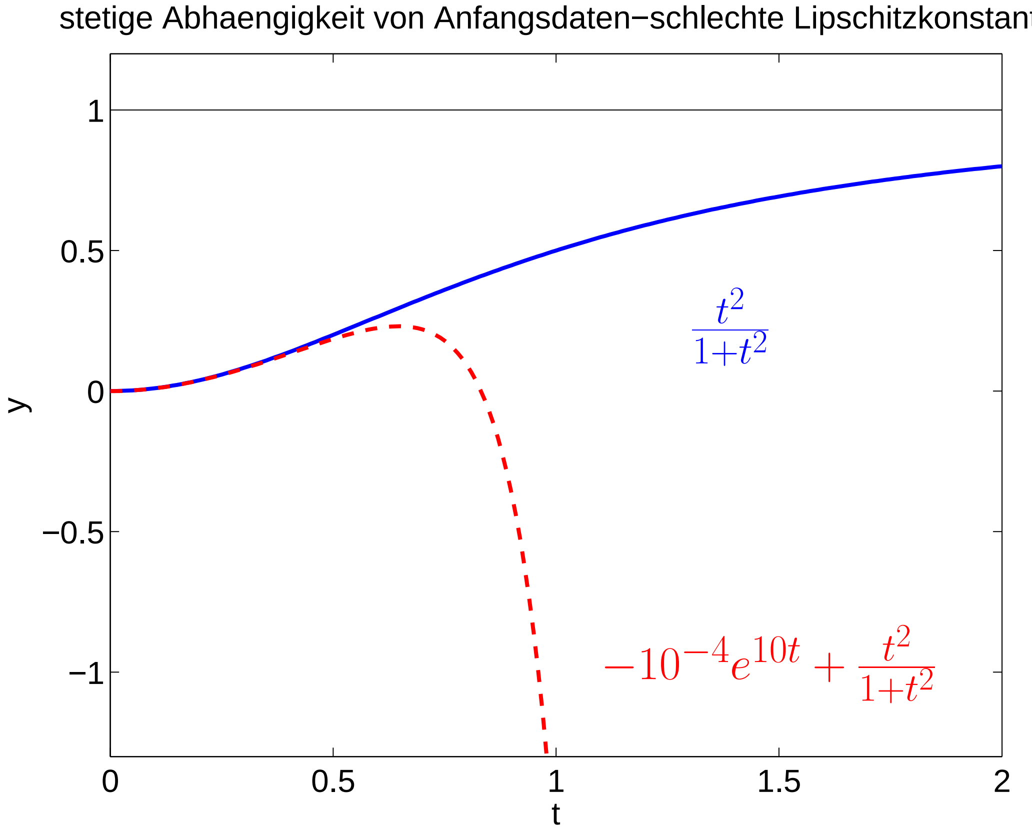
Stetige Abhängigkeit der Lösung von Anfangsdaten

$f \in C(G)$ und lipschitzstetig im 2. Argument mit Lipschitzkonstante L. D.g.:

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y(t_0) - z(t_0)\| e^{L|t-t_0|}$$



$$y' = 10\left(y - \frac{t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2t}{(1+t^2)^2},$$

$$y(0) = y_0$$

links: die Fälle $y_0 = 0$ und $y_0 = -10^{-4}$

Maximale Definitionsgebiete

$f \in C(G) \Longrightarrow$ jede Lösung läßt sich nach links und rechts bis zu ∂G fortsetzen

Insbesondere für die Fortsetzbarkeit "nach rechts" (d.h. die Lösung existiert auf dem Intervall (t_0, t^+)) können nur die folgenden 3 Fälle auftreten:

1. $t^+ = \infty$ ($\rightarrow$ die Lösung existiert für alle Zeiten)

2. $\exists t^+ > t_0$ s.d. $\limsup_{t \to t^+} \|y(t)\| = \infty$ ("blow-up")

3. $\exists t^+ > t_0$ s.d. $\liminf_{t \to t^+} \operatorname{dist}((t, y(t)), \partial G) = 0$ (Kollaps)

Fortsetzbarkeit nach "links": analog

Beispiele für maximale Definitionsgebiete

1. blow-up: $y' = y^2, \qquad y(0) = 1$ D.g.: $y(t) = \frac{1}{1-t}$, was offensichtlich bei $t = 1$ explodiert.

2. Kollaps: $y' = -2 + \sin \dfrac{1}{y(t)}, \qquad y(0) = 1. \qquad (G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\})$