

5 Randwertprobleme

Bei den bisher betrachteten Problemen handelte es sich um Anfangswertprobleme. In der Praxis treten, insbesondere bei Differentialgleichungen höherer Ordnung, auch *Randwertprobleme* auf. Bei solchen Problemen ist eine Funktion $t \mapsto y$ gesucht, die zum einen eine Differentialgleichung erfüllt, zum anderen Bedingungen für Funktionswerte (oder Ableitungen) zu zwei verschiedenen Zeitpunkten t_0, T .

Wir führen die Problematik an den folgenden, einfachen Fällen vor:

Beispiel 5.1. Finde eine Funktion $y \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ (hier ist $n \geq 2$), so daß

$$y' = f(t, y), \quad t \in J, \quad (5.1a)$$

$$\mathbf{A}y(t_0) + \mathbf{B}y(T) = \mathbf{c}, \quad (5.1b)$$

wobei die Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und der Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ gegeben sind. Z.B. können bei verschiedenen Komponenten von y die Funktionswerte zum Zeitpunkt t_0 und T gegeben sein. ■

Eine wichtige Klasse von Randwertproblemen entsteht bei der Behandlung von Differentialgleichungen höherer Ordnung:

Beispiel 5.2. Finde eine Funktion $t \mapsto y(t)$, so daß

$$y'' = f(t, y, y') \quad \text{für } t \in J, \quad (5.2a)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad y(T) = y_T \quad (5.2b)$$

zu gegebener Funktion f und Werten y_0, y_T . ■

Bemerkung 5.3. Die Randbedingung (5.2b) ist nur eine mögliche Randbedingung. Man spricht im vorliegenden Fall von *separierten* Randbedingungen, weil die Werte von y (oder von y') an den Stellen t_0 und T nicht gekoppelt sind. Allgemeinere Randbedingungen wären analog zu (5.1b)

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} y(T) \\ y'(T) \end{pmatrix} = \mathbf{c}$$

für Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$. Auch nichtlineare Kopplungen treten in der Praxis auf. ■

Während wir mit dem Satz von Peano (Satz 1.1) unter schwachen Annahmen an die rechte Seite f Existenz von Lösungen und mit dem Satz von Picard-Lindelöf (Satz 1.3) auch (lokale) Eindeutigkeit erhalten haben, ist die Situation bei Randwertproblemen schwieriger, wie die folgenden Beispiele zeigen:

Beispiel 5.4. 1. Das Randwertproblem

$$y'' + y = 0 \quad \text{auf } [0, \pi/2], \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1,$$

hat die eindeutige Lösung $y(t) = \sin t$.

2. Das Randwertproblem

$$y'' + y = 0 \quad \text{auf } [0, \pi], \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0,$$

wird von jeder Funktion der Form $y(t) = c \sin t$, $c \in \mathbb{R}$ gelöst.

3. Das Randwertproblem

$$y'' + y = 0 \quad \text{auf } [0, \pi], \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1,$$

besitzt keine Lösung.

■

Wir werden im folgenden nicht die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit vertiefen. Für die vorzustellenden Algorithmen nehmen wir Existenz und Eindeutigkeit als gegeben an.

Randwertprobleme können mit zwei verschiedenen Typen von Techniken gelöst werden:

1. *Schießverfahren* (engl.: *shooting methods*) bauen auf dem Lösen von Anfangswertproblemen auf und führen das Lösen von Randwertproblemen auf Nullstellensuche von (nichtlinearen) Funktionen zurück.
2. Bei *Differenzenverfahren/Projektionsverfahren* werden die Unbekannten Funktionswerte y_i , $i = 0, \dots, N$, an den Stellen t_i direkt als Unbekannte angesetzt. Es entsteht dann ein großes (i.a. nichtlineares) Gleichungssystem, welches gelöst werden muß.

Wir werden beide Verfahren kurz ansprechen.

5.1 Schießverfahren

Wir führen die Ideen des Schießverfahrens für das Randwertproblem (5.2) vor. Wir formulieren wir die Differentialgleichung als ein System von ODEs erster Ordnung: Mit der Definition

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

erhalten wir die Aufgabe

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_2 \\ f(t, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Weiter schreiben wir

$$\mathbf{y}_0 := \begin{pmatrix} y_0 \\ s_0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Ist $s_0 = y'(t_0)$ bekannt, dann kann die Lösung von (5.2) einfach als Lösung $\mathbf{y}_{t_0, \mathbf{y}_0}$ des Anfangswertproblems

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \quad (5.6)$$

bestimmt werden. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir die Komponenten des Lösungsvektors $\mathbf{y}_{t_0, \mathbf{y}_0}$ als

$$\mathbf{y}_{t_0, \mathbf{y}_0}(t) = \begin{pmatrix} y(t, t_0, y_0, s_0) \\ y'(t, t_0, y_0, s_0) \end{pmatrix}.$$

Die unbekannte Größe s_0 , die die zweite Komponente von \mathbf{y}_0 darstellt, ergibt sich aus der zweiten Randbedingung (5.2b), d.h. aus der Bedingung

$$y(T, t_0, y_0, s_0) \stackrel{!}{=} y_T.$$

Somit erhalten wir:

$$\text{Finde } s_0 \in \mathbb{R}, \text{ so da\ss } y(T, t_0, y_0, s_0) - y_T = 0. \quad (5.7)$$

Dies ist nun eine (i.a. nichtlineare) Gleichung, die mit bekannten Techniken gel\u00f6st werden kann. Wir betrachten hier die M\u00f6glichkeit, die Gleichung (5.7) mit Hilfe des Newtonverfahrens zu l\u00f6sen. Hierzu ben\u00f6tigen wir die Ableitung $\partial_{s_0}y(T, t_0, y_0, s_0)$. Wir zeigen nun, da\ss $\partial_{s_0}y(T, t_0, y_0, s_0)$ als L\u00f6sung eines Anfangswertproblems bestimmt werden kann (vgl. auch \u00dcbung 1.7):

Lemma 5.5. *Sei $y(t, t_0, y_0, s_0)$ die L\u00f6sung des Anfangswertproblems*

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = s_0.$$

Dann ist die Funktion $v : t \mapsto \partial_{s_0}y(t, t_0, y_0, s_0)$ L\u00f6sung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} v''(t) &= f_y(t, y(t, t_0, y_0, s_0), y'(t, t_0, y_0, s_0))v(t) + f_{y'}(t, y(t, t_0, y_0, s_0), y'(t, t_0, y_0, s_0))v'(t) \\ v(t_0) &= 0, \quad v'(t_0) = 1. \end{aligned} \quad (5.8a) \quad (5.8b)$$

Beweis: Die L\u00f6sung $t \mapsto y(t, t_0, y_0, s_0)$ erf\u00fcllt

$$y''(t, t_0, y_0, s_0) = f(t, y(t, t_0, y_0, s_0), y'(t, t_0, y_0, s_0)), \quad y(t_0, t_0, y_0, s_0) = y_0, \quad y'(t_0, t_0, y_0, s_0) = s_0.$$

Differenziert man diese Gleichung nach s_0 und wendet die Kettenregel an, so ergibt sich, da\ss die Funktion $v(t) := \partial_{s_0}y(t, t_0, y_0, s_0)$ die Gleichung

$$v''(t) = f_y(t, y(t, t_0, y_0, s_0), y'(t, t_0, y_0, s_0))v(t) + f_{y'}(t, y(t, t_0, y_0, s_0), y'(t, t_0, y_0, s_0))v'(t)$$

erf\u00fcllt. Als Anfangsbedingungen haben wir f\u00fcr v wegen

$$\begin{aligned} v(t_0) &= \partial_{s_0}y(t_0, t_0, y_0, s_0) = \partial_{s_0}y_0 = 0, \\ v'(t_0) &= \partial_{s_0}y'(t_0, t_0, y_0, s_0) = \partial_{s_0}s_0 = 1. \end{aligned}$$

□

finis 14.DS

Lemma 5.5 zeigt, da\ss die gesuchte Funktion $s \mapsto y(T, t_0, y_0, s)$ sogar als L\u00f6sung *linearen* Anfangswertproblems bestimmt werden kann. Insgesamt ergibt sich folgender Algorithmus f\u00fcr Randwertprobleme der Form (5.2):

Algorithmus 5.6 (einfaches Schie\ssverfahren). % input: Startwerte $y_0, s_0^{(0)}$ $n := 0$

1. bestimme (numerisch) $y(t, t_0, y_0, s_0^{(n)})$ durch L\u00f6sen des Anfangswertproblems (5.6)
2. bestimme (numerisch) $\partial_{s_0}y(T, t_0, y_0, s_0^{(n)})$ durch L\u00f6sen des Anfangswertproblems (5.8)
3. F\u00fchre einen Newtonschritt zur L\u00f6sung von $y(T, t_0, y_0, s_0^{(n)}) - y_T = 0$ durch:

$$(a) \quad s_0^{(n+1)} := s_0^{(n)} - \left(\partial_{s_0}y(T, t_0, y_0, s_0^{(n)}) \right)^{-1} (y(T, t_0, y_0, s_0^{(n)}) - y_T)$$

$$(b) \quad n := n + 1$$

4. Prüfe Abbruchbedingungen des Newtonverfahrens (im allereinfachsten Fall, ob $|y(T, t_0, y_0, s_0^{(n)}) - y_T|$ hinreichend klein ist). Falls nicht, gehe zu 1.

Beispiel 5.7. Wir betrachten das Randwertproblem

$$y'' = \lambda y + y', \quad (5.9a)$$

$$y(0) = 1, \quad y(T) = 1, \quad (5.9b)$$

wobei $\lambda > 0$ ein Parameter ist. Für $\lambda = 10$ und $T = 1$ bzw. $T = 10$ ist die gesuchte Lösung in Tabelle 5.1 gezeichnet. Wir verwenden nun Algorithmus 5.6, um das Randwertproblem zu lösen. Die erste Tabelle in Tabelle 5.1 zeigt das Verhalten von Algorithmus 5.6, wenn als numerisches Verfahren zum Lösen der Anfangswertproblem das RK4-Verfahren mit $N = 10$ Schritten verwendet wird. Der Algorithmus liefert nach einem Newtonschritt die gewünschte Approximation (dies sollte auch so sein, da im vorliegenden Fall die Funktion $s \mapsto y(T, t_0, y_0, s)$ ein Polynom ersten Grades ist!).

Wir wenden uns nun dem Fall $T = 10$ zu. Die zweite Tabelle in Tabelle 5.1 zeigt das Verhalten von Algorithmus 5.6 (wieder mit dem RK4-Verfahren und $N = 10$ Schritten). Hier beobachten wir, daß wir der Fehler $y(T) - y_T$ nicht unter $0.5 \cdot 10^{-2}$ gedrückt werden kann. Auch eine Erhöhung der Rechengenauigkeit ($N = 1000$) in der letzten Tabelle erbringt nicht das gewünschte Ergebnis. Das Verhalten kann man mit einer Sensitivitätsanalyse erklären. Aus Satz 1.5 erhalten wir die Abschätzung

$$|y(T, t_0, y_0, s) - y(T, t_0, y_0, s + \varepsilon)| \leq C e^{LT} \varepsilon, \quad (5.10)$$

wobei L die Lipschitzkonstante ist. Im vorliegenden Fall ist $L = \lambda = 10$ und $T = 10$, so daß der Verstärkungsfaktor $e^{LT} = e^{100} = 2.7 \cdot 10^{43}$. Zwar ist dies nur eine Abschätzung, aber im vorliegenden Fall können wir uns davon überzeugen, daß die Aussage qualitativ richtig ist (siehe unten). Wir erhalten damit, daß das Schießverfahren im vorliegenden Fall extrem sensitiv auf Störungen der Anfangssteigung s reagiert. Diese Sensitivität ist zu groß für eine Rechengenauigkeit von ungefähr 10^{-16} .

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5.9a) ist von der Form

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

wobei die Parameter λ_1, λ_2 die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda}}{2}$$

der quadratischen Gleichung $x^2 - x - \lambda = 0$ sind. Die Lösung des Randwertproblems läßt sich über die Lösungsformel einfach bestimmen. Für den Fall $T = 10$ und $\lambda = 10$ erhalten wir z.B.

$$\mathbf{y}(t) = \frac{e^{110} - 1}{e^{110} - e^{-110}} e^{-10t} \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix} + \frac{1 - e^{-110}}{e^{110} - e^{-110}} e^{11t} \begin{pmatrix} 1 \\ -10 + \frac{21(1 - e^{-100})}{e^{110} - e^{-100}} \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Weiter können wir die Lösung $y(T, t_0, y_0, s)$ für $T = 10, y_0 = 1$ und $s \in \mathbb{R}$ zu

$$y(t, t_0, y_0, s) = \frac{11y_0 - s}{21} e^{-10t} + \frac{10y_0 + s}{21} e^{11t} \quad (5.12)$$

Der gesuchte Wert s_{exakt} , der zu $y(T, t_0, y_0, s) = y_T$ führt, ist damit

$$s_{\text{exakt}} = -10 + \frac{21(1 - e^{-100})}{e^{110} - e^{-110}}. \quad (5.13)$$

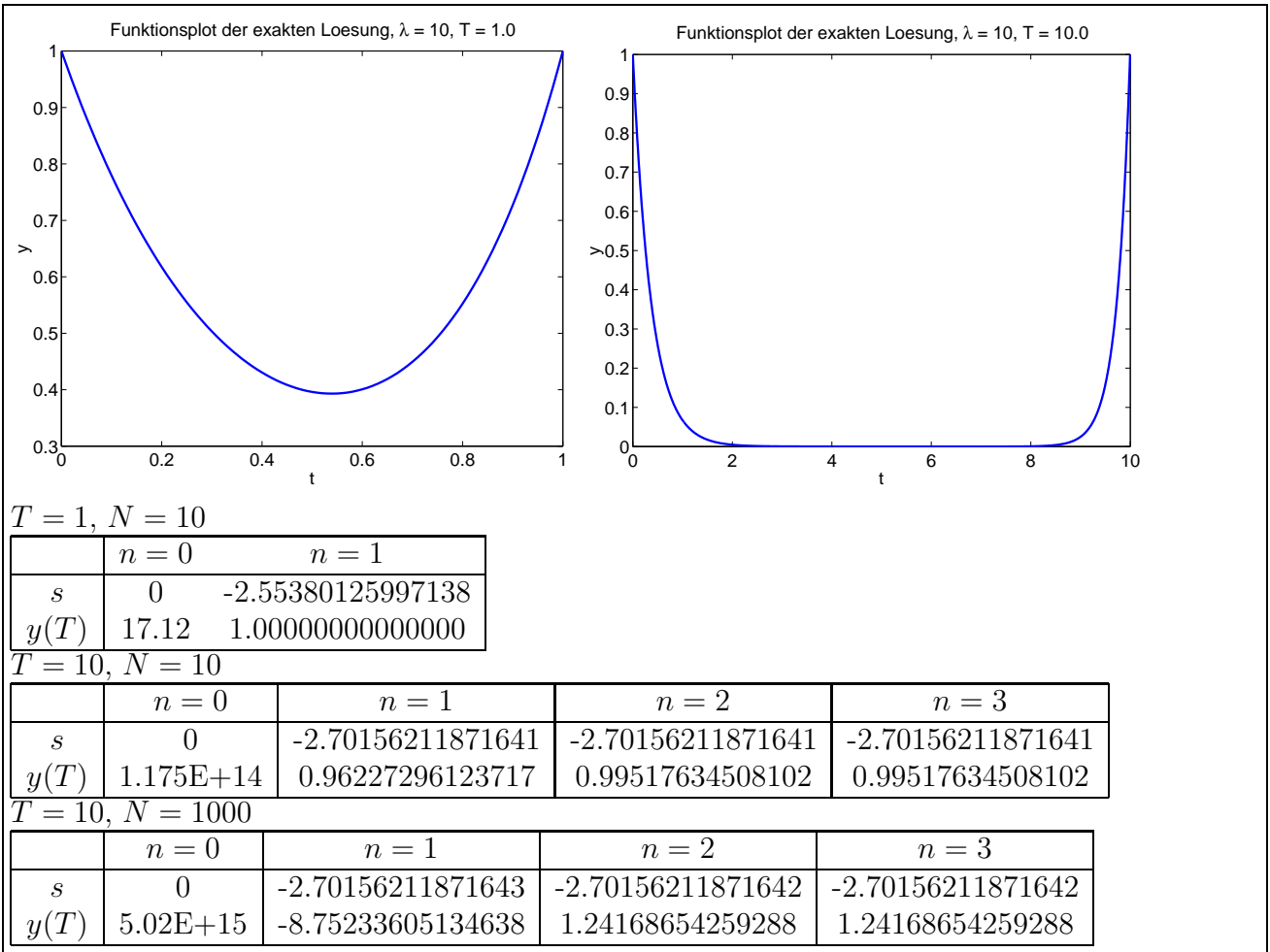


Tabelle 5.1: Beispiel für das Schießverfahren

Hieraus folgt für $y_0 = 1$, $t = T = 10$ und $s = s_{\text{exakt}} + 10^{-16}$

$$y(T, t_0, y_0, s) \approx y_T + 10^{-16} e^{11T} \approx y_T + 6 \cdot 10^{31}$$

■

Bemerkung 5.8. Die in Beispiel 5.7 beobachtete Sensitivität zeigt, daß auch beim iterativen Lösen Vorsicht geboten ist:

- Wegen der nur lokalen Konvergenz des Newtonverfahrens wird man in der Praxis das gedämpfte Newtonverfahren einsetzen, weil der korrekte Wert der Steigung s nicht bekannt ist.
- Falls die Ableitungen von f nicht zur Verfügung stehen (hier könnten auch Techniken des automatischen Differenzieren, [3] eingesetzt werden), muß numerisch differenziert werden. Bei hohen Genauigkeitsanforderungen (z.B. wenn $L|T - t_0|$ groß ist) kann dies hohe Rechenanforderungen an die zu lösenden Anfangswertprobleme stellen.

■

Beispiel 5.7 zeigt eine wesentliche Schwäche des einfachen Schießverfahrens: Der Verstärkungsfaktor $e^{L|T-t_0|}$, der sich aus Satz 1.5 ergibt, kann dazu führen, daß das Schießverfahren aufgrund zu großer Sensitivität der Funktion $s \mapsto y(T, t_0, y_0, s)$ versagt. Um diese Sensitivität zu verringern muß der Faktor $L|T - t_0|$ verkleinert werden. Da L vorgegeben ist, muß also das Intervall verkleinert werden. Das führt auf das *Mehrfachschießverfahren* (engl.: *multiple shooting method*, auch Mehrzielverfahren): Das Intervall $[t_0, T]$ wird in $M \in \mathbb{N}$ Teilintervalle zerlegt mit $t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$. Die Teilintervalle werden so gewählt, daß die zugehörigen Verstärkungsfaktoren $e^{L|t_{i+1}-t_i|}$ moderat sind. Beim Mehrfachschießverfahren werden

$$\text{die Werte } y_i = y(t_i) \quad \text{und die Steigungen } s_i = y'(t_i), \quad i = 0, \dots, M,$$

als gesuchte Parameter angesetzt. Die Idee ist, auf jedem Intervall (t_i, t_{i+1}) die Lösung $y(t, t_i, y_i, s_i)$ zu berechnen und dann die zu bestimmenden Werte y_i, s_i durch die Bedingungen

$$y(t_{i+1}, t_i, y_i, s_i) \stackrel{!}{=} y_{i+1}, \quad y'(t_{i+1}, t_i, y_i, s_i) \stackrel{!}{=} s_{i+1}, \quad i = 0, \dots, M - 2$$

festzulegen; dies ist gerade die stetige Differenzierbarkeit der Lösung $t \mapsto y(t)$ und den “inneren” Stützstellen $t_i, i = 1, \dots, M - 1$. Die Randbedingungen $y(t_0) = y_0$ und $y(T) = y_T =: y_M$ kommen als zwei weitere Bedingungen hinzu. Somit erhalten wir als das Mehrfachschießverfahren:

gegeben y_0 und $y_M := y_T$,

finde $y_i, i = 1, \dots, M - 1$ und $s_i, i = 0, \dots, M - 1$, so daß

$$y(t_{i+1}, t_i, y_i, s_i) = y_{i+1}, \quad i = 0, \dots, M - 1, \quad (5.14a)$$

$$y'(t_{i+1}, t_i, y_i, s_i) = s_{i+1}, \quad i = 0, \dots, M - 2. \quad (5.14b)$$

Die Bedingungen (5.14) stellen ein (i.a. nichtlineares) Gleichungssystem dar. Löst man dieses mit dem Newtonverfahren, so müssen die Ableitungen

$$\partial_{s_i} y(t, t_i, y_i, s_i), \quad \partial_{y_i} y(t, t_i, y_i, s_i), \quad \partial_{y_i} y'(t, t_i, y_i, s_i) \quad \partial_{s_i} y'(t, t_i, y_i, s_i)$$

bestimmt werden. Diese können wie in Lemma 5.5 als Lösungen von geeigneten Anfangswertproblemen identifiziert werden (Übung: geben Sie die Anfangswertprobleme an). Auch hier gelten die Kommentare aus Bemerkung 5.8 sinngemäß.