# Gaußregeln

1. **Gaußregeln:**
   Stützstellen $c_i$, Koeffizienten $b_i$: entsprechen einer klassischen **Gaußregel** auf $[0,1]$

   **Konsistenzordnung:** $p = 2s$

   Beispiel für $s = 2$ und $p = 4$: $$\begin{array}{c|cc} \frac{3-\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{3-2\sqrt{3}}{12} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{6} & \frac{3+2\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

2. **Radauregeln:** $c_1 = 0$ oder $c_s = 1$ (d.h. $t$ oder $t+h$ ist Quadraturpunkt).

   **Konsistenzordnung:** $p = 2s - 1$

   Beispiele: explizites und implizites Eulerverfahren

   Beispiele für $s = 2$ und $p = 3$: $$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

3. **Lobattoregeln:** $c_1 = c_s = 0$, d.h. sowohl $t$ als auch $t+h$ sind Quadraturpunkte.

   **Konsistenzordnung:** $p = 2s - 2$.

   Vorteil: erste Zeile und letzte Spalte des Butcherschemas können nur Nullen enthält, d.h. die Stufen $k_1$ und $k_s$ explizit bestimmbar

   Beispiele für $s = 2$ und $p = 2$, bzw. $s = 3$, $p = 4$: $$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

**Namensgebung:** Für Funktionen $f$, die nur von $t$ abhängen, reduzieren sich die obigen Regeln auf bekannte Quadraturformeln, die nach Gauß, Radau und Lobatto benannt sind. Es gilt:

1. die Gaußregel ist exakt für $f \in \mathcal{P}_{2s-1}$
2. die Radauregel ist exakt für $f \in \mathcal{P}_{2s-2}$
3. die Lobattoregel ist exakt für $f \in \mathcal{P}_{2s-3}$